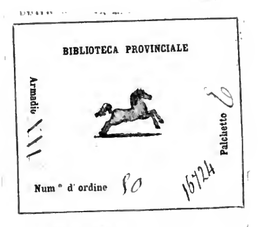
HUGON

ANALYSE

DES TRAJECTOIRES

N. - 16


PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num° d' ordine



ESSAI

D'UNE

NOUVELLE MÉTHODE D'ANALYSE DES TRAJECTOIRES

ET

APPLICATION AU TIR DES CANONS RAYÉS;

PAR C. HUGON,

CHEF D'ESCADRON D'ARTILLERIE, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

—

1859

PRÉFACE.

La précision admirable du tir du canon rayé de 4 de campagne m'a fait penser que de ses hausses expérimentales il devait être possible de conclure la loi des résistances qu'éprouve le projectile, et des variations que subit sa vitesse.

La solution de ce problème est l'objet principal du Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Artillerie.

Je l'ai fait précéder de l'exposé d'une nouvelle méthode de calcul des trajectoires, à laquelle j'ai été amené par l'observation suivante sur un caractère essentiel de l'équation de la trajectoire dans l'air : c'est que le coefficient différentiel de deuxième ordre de cette équation doit aller toujours en augmentant au lieu de conserver une valeur constante, ce qui arriverait si, à un instant quelconque la résistance de l'air cessant, le projectile continuait à parcourir la parabole osculatrice.

Une autre observation, c'est que, si la forme parabolique est impropre à représenter la trajectoire dans toute son étendue, néanmoins cette forme si simple, à laquelle on cherche à ramener presque toutes les applications numériques des théories mathématiques, s'applique parfaitement à tous les arcs de trajectoire dans les limites de la pratique de l'artillerie.

Je recommande l'emploi des formules qui rapportent immédiatement la trajectoire à son sommet. Ces formules sont moins compliquées que les formules générales; et quelques calculs simples, qu'on peut remplacer en partie par des constructions graphiques, permettent de transporter l'origine en un point quelconque et de supposer au mouvement initial une inclinaison quelconque.

La légitimité de cette transformation de coordonnées ressort du principe pratique si nettement exprimé dans les lignes suivantes, que j'extrais de l'*Instruction sur le Tir.* (Principes généraux du tir).

« La trajectoire et la ligne de mire peuvent être considérées comme liées invariablement entre elles..., pourvu qu'on ne donne pas à celle-ci une trop grande inclinaison au-dessus ou au-dessous de l'horizon. »

J'ai exposé, aussi succinctement qu'il m'a été possible, la methode de tâtonnement, par laquelle je suis arrivé à la formule exprimant la résistance que l'air oppose au projectile lancé par le canon rayé de 4.

Ces tâtonnements ne sont pas particuliers à la méthode que nous avons exposée : ils sont inhérents à toute étude des phénomènes naturels.

La complication de ces phénomènes oblige toujours à négliger certains éléments. Aussi, si les principes mathématiques sont absolus, les observations et les mesures d'où l'on tire les données bases de leurs applications, sont toujours entachées d'erreurs ou d'incertitudes ; les résultats ne sont donc jamais qu'approximatifs et plus ou moins exacts.

ESSAI

D'UNE

NOUVELLE MÉTHODE D'ANALYSE DES TRAJECTOIRES

ET

APPLICATION AU TIR DES CANONS RAYÉS.

PREMIÈRE PARTIE.

NOUVELLE MÉTHODE D'ANALYSE DES TRAJECTOIRES.

CHAPITRE PREMIER.

BASES DE LA MÉTHODE.

Les formules proposées jusqu'à ce jour, pour représenter le mouvement des projectiles dans l'air, ont été toutes établies sur l'hypothèse que la résistance de l'air est une force de direction exactement contraire, à chaque instant, à celle du projectile.

Nous adopterons d'abord cette hypothèse, légitime tant qu'il s'agit des projectiles lancés par les armes à canon lisse. Dans le cas du tir des armes rayées, elle est évidemment fausse. Nous exposerons plus loin par quel procédé nous avons pu tenir compte, dans ce cas, de l'obliquité de la résistance de l'air sur la direction du projectile.

§ 1.

Expressions de la vitesse et de la résistance de l'air, en fonction des coefficients différentiels de la trajectoire.

Étant admis que la direction du projectile n'est modifiée que par la pesanteur; la mesure du changement de direction produit par l'action de cette force connue, pendant un trajet très-court, donnera immédiatement la mesure de la durée de ce trajet, et par conséquent de la vitesse.

En employant les notations usitées dans le calcul infinitésimal, et appelant :

x, y les abscisse et ordonnée d'un point;

ds l'élément de trajectoire;

dt l'élément de temps;

v la vitesse;

m la masse du projectile;

g la pesanteur;

si l'on considère en un point d'une trajectoire la parabole osculatrice, l'arc de contact des deux courbes sera parcouru dans le même temps.

Dans la parabole,

$$d^2y = -g\,dt^2$$

donne

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -g\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = -g\cdot\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\cdot\left(\frac{ds}{dx}\right)^2.$$

Or

$$\frac{ds}{dt} \text{ c'est } v; \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

donc, pour la trajectoire comme pour la parabole,

$$(1) \qquad v^2 = -g\cdot\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

La résistance de l'air se déduira de cette première expression.

Appelons ρ cette force.

C'est à elle et à la pesanteur que sont dues les variations de la vitesse.

La pesanteur agit sur la quantité de mouvement par sa composante tangentielle

$$-mg\cdot\frac{dy}{ds}.$$

La résistance de l'air étant tangentielle exerce tout son effet

$$-\rho.$$

La vitessse produite par ces deux forces pendant le temps $dt = \frac{dt}{dx}\cdot dx$ est

$$dv = \left(-g\frac{dy}{ds} - \frac{\rho}{m}\right)\frac{dt}{dx}dx = -\frac{g}{v}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot dx - \frac{\rho}{m}\cdot\frac{ds}{dx}\cdot dx.$$

Or, si l'on différentie par rapport à x l'équation (1), on a

$$2v\cdot\frac{dv}{dx} = -2g\frac{dy}{dx} + g\,\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^3y}{dx^3}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

ou

$$dv = -\frac{g}{v}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot dx - \frac{v}{2}\,\frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot dx.$$

Comparant ces deux expressions de *dv*, on en conclut l'équation

$$(2)\qquad \frac{\rho}{m.v}\cdot\frac{ds}{dx} = \frac{v}{2}\cdot\frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}};\qquad \rho = \frac{mv^2}{2}\;\frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Ainsi, étant données, pour un point quelconque d'une trajectoire, les valeurs des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$; les formules (1) et (2) donnent pour ce point la vitesse du projectile et la résistance de l'air.

Réciproquement, si l'on suppose connue l'expression de la résistance de l'air en fonction de la vitesse, on en pourra déduire les valeurs des coefficients différentiels successifs de la trajectoire.

§ II.

Formule empirique adoptée pour exprimer la résistance de l'air en fonction de la vitesse.

La Commission des principes du tir a reconnu que, dans les limites de la pratique de l'artillerie, la résistance de l'air au mouvement des projectiles croît plus rapidement que le carré de la vitesse, et peut être exprimée approximativement par la formule

$$\rho = A\pi R^2 v^2\left(1+\frac{v}{r}\right).$$

Nous écrirons la même formule avec une légère différence dans les notations

$$\rho = k.m.v^2\left(1+\frac{v}{r}\right),$$

k et r étant des quantités variables avec le calibre et l'état du projectile, et avec l'état atmosphérique, mais devant être considérées comme des constantes dans chaque problème particulier.

Il nous a paru, comme nous l'exposerons plus loin, que dans le tir du canon rayé de campagne, la résistance de l'air croissait plus rapidement même que le cube de la vitesse; nous avons donc adopté, pour le calcul de nos formules, l'ex-

pression plus générale.

$$\rho = km.v^2\left(1 + \frac{v}{r} + \frac{v^3}{s^3}\right)$$

qu'on ramène de suite à la précédente, en posant

$$s^3 = \infty\,; \qquad \frac{1}{s^3} = 0.$$

§ III.

Coefficients différentiels résultant de cette loi empirique.

La fonction que nous venons d'adopter, substituée à ρ dans l'expression

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{g}{v}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{\rho}{mv}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

cette expression devient

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{g}{v}\cdot\frac{dy}{dx} - \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} k.v\left(1 + \frac{v}{r} + \frac{v^3}{s^3}\right).$$

Si l'on met maintenant l'équation (1) sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v^2}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

pour former les dérivées successives de cette fonction, il faudra différentier chaque dérivée par rapport aux fonctions v et $\frac{dy}{dx}$ et substituer, dans l'expression ainsi trouvée, ces valeurs de $\frac{dv}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Nous avons renvoyé à la fin de ce Mémoire, le tableau de ces coefficients différentiels. La complication des formules, dans le cas général, nous a arrêté après l'expression de $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Mais les formules se simplifient beaucoup pour un point particulier de la trajectoire, le sommet.

En ce point, en effet, $\frac{dy}{dx} = 0$, ce qui fait disparaître du développement tous les termes qui ont pour facteur $\frac{dy}{dx}$, et dans les termes restants supprime le radical $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ qui se trouve comme facteur dans tous à des puissances diverses.

Le tableau des coefficients différentiels, pour ce cas particulier, porte le n° 2. Il comprend la valeur de $\frac{d^8 y}{dx^8}$, déduite du terme général $\frac{d^r y}{dx^r}$.

Les tableaux suivants donnent les valeurs que prennent ces fonctions, pour le même point, lorsqu'on supprime un ou plusieurs termes de la formule empirique

$$\rho = km.v^2\left(1 + \frac{v}{r} + \frac{v^2}{s^2}\right).$$

§ IV.

Développement en série de la fonction qui représente la trajectoire.

Nous ne nous occuperons que de la trajectoire rapportée à son sommet.

La courbe osculatrice du huitième ordre de la trajectoire est représentée par l'équation

$$y = M_2 x^2 + M_3 x^3 + M_4 x^4 + M_5 x^5 + M_6 x^6 + M_7 x^7 + M_8 x^8,$$

en posant

$$2.M_2 = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

$$6.M_3 = \frac{d^3 y}{dx^3},$$

$$24.M_4 = \frac{d^4 y}{dx^4},$$

$$120.M_5 = \frac{d^5 y}{dx^5},$$

$$720.M_6 = \frac{d^6 y}{dx^6},$$

$$5040.M_7 = \frac{d^7 y}{dx^7},$$

$$40320.M_8 = \frac{d^8 y}{dx^8}.$$

Pendant un espace assez long des deux côtés du sommet, les ordonnées de la trajectoire et de la courbe osculatrice sont égales.

La différence entre ces ordonnées ne commencera à être sensible qu'un certain temps après que la divergence aura commencé entre les directions de leurs éléments.

Continuant à employer les mêmes termes pour exprimer des effets dus à une cause analogue; nous dirons :

La différence entre les inclinaisons des éléments qui sont placés sur une même verticale ne commencera à être sensible qu'un certain temps après qu'une dif-

férence se sera manifestée entre les coefficients différentiels du deuxième ordre des deux courbes.

Cette différence elle-même entre les coefficients différentiels du deuxième ordre, ne sera sensible qu'un certain temps après qu'une différence appréciable se sera manifestée entre les coefficients différentiels du troisième ordre.

La succession plus ou moins rapide de ces différences sensibles, c'est-à-dire qu'on ne doit pas négliger, entre les coefficients différentiels d'ordres de moins en moins élevés, et enfin entre les ordonnées des deux courbes, dépend des rapports des quantités M_2, M_3, M_4.

C'est sur ces observations qu'est basée la méthode que nous allons exposer pour calculer approximativement les termes

$$M_9 . x^9 + M_{10} . x^{10} + M_{11} . x^{11} + \dots$$

à ajouter aux termes déjà connus.

De ces termes déjà connus on déduira, pour un certain nombre de valeurs de x de part et d'autre du sommet, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$; et, à l'aide de ces valeurs, la vitesse en ces points et la résistance de l'air.

Pendant une certaine étendue, ces valeurs de la résistance sont égales à celles calculées directement pour les mêmes vitesses, d'après la loi empirique adoptée.

A partir de certaines valeurs de x cependant, ces deux valeurs commencent à différer sensiblement ; et pour des valeurs de plus en plus fortes, elles diffèrent de plus en plus.

La méthode consiste à attribuer exclusivement cette différence aux quelques termes

$$504 . M_9 x^6 + 720 . M_{10} x^7 + \dots + n(n-1)(n-2) M_n . x^{n-3},$$

qui résultent pour le coefficient différentiel du troisième ordre de l'introduction des termes

$$M_9 x^9 + M_{10} x^{10} + \dots + M_n x^n$$

dans l'équation de la trajectoire;

Et à calculer les valeurs M_9, M_{10}, ..., M_n au moyen d'un même nombre d'équations de condition résultant de cette hypothèse.

Si les valeurs de x ont été bien choisies, l'introduction des nouveaux termes dans l'équation de la trajectoire ne changera que très-peu les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, et par conséquent de v^2.

Un tâtonnement facile permettrait du reste de corriger les premières valeurs obtenues



Il est possible, après une première opération ainsi conduite, et quelques termes ajoutés à l'équation, d'en ajouter d'autres encore par une répétition du même procédé, qui devra réussir tant que $\frac{d^3y}{dx^3}$ sera suffisamment petit par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Les essais que nous avons faits nous autorisent à penser que l'on peut par cette méthode et sans de trop longs calculs trouver, avec une très-grande approximation, même les trajectoires des bombes lancées sous l'angle de 60 degrés, le plus grand de ceux en usage dans l'artillerie.

§ V.

Remarque.

Bien que nous regardions la forme parabolique comme la plus avantageuse et suffisante pour représenter tous les cas de la pratique, nous avons cru cependant ne pas devoir nous dispenser d'une analyse rigoureuse des conditions auxquelles doit satisfaire la trajectoire, et de la recherche de la forme que peut prendre son équation pour satisfaire à ces conditions

Mais comme l'application numérique de cette discussion à un cas déterminé nous a paru devoir entraîner de nombreux tâtonnements et des calculs plus pénibles peut-être qu'intéressants, nous avons jugé devoir porter cette discussion dans une note que l'on trouvera à la fin de ce Mémoire.

CHAPITRE II.

MÉTHODE ANALYTIQUE POUR CONCLURE DES HAUSSES LA LOI DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR.

Dans le précédent chapitre, nous avons cherché à conclure la trajectoire de la loi supposée connue de la résistance de l'air. Nous nous proposons dans celui-ci l'étude du problème inverse.

Nous pensons que des hausses qu'il faut donner à une bouche à feu, pour lancer son projectile, avec une même vitesse initiale à différentes distances, on peut conclure, en se renfermant dans de certaines limites, la loi de la résistance de l'air.

La méthode que nous allons exposer suppose que l'arc de courbe observé s'écarte peu de l'horizontale, afin que les composantes verticales de la résistance de l'air soient toujours très-petites, et que la durée des trajets puisse être donnée assez approximativement par l'abaissement du projectile au-dessous de la ligne de projection. Cet arc cependant doit avoir une certaine étendue, afin qu'il y ait une assez grande différence entre les vitesses extrêmes du projectile.

§ I.

Formule générale.

Soient donc trois points d'une trajectoire connus par les hausses correspondantes.

Les valeurs de t, déduites de l'abaissement de ces points au-dessous de la ligne de projection, donneront trois équations de condition pour déterminer les constantes de l'équation

$$t = Ax + Bx^2 + Cx^3 \quad \text{ou} \quad \frac{t}{x} = A + Bx + Cx^2.$$

De cette équation on tirera

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{A + 2Bx + 3Cx^2},$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2B + 6Cx}{(A + 2Bx + 3Cx^2)^2} = -v^2\left(2B + 6Cx\right).$$

$$\frac{\rho}{m} = -v\frac{dv}{dx} = v^3\left(2B + 6Cx\right).$$

Dans les conditions que nous avons imposées plus haut à l'arc de trajectoire, v et ρ vont en diminuant à partir de l'origine, c'est-à-dire à mesure que x augmente.

Le coefficient B devra toujours être positif.

La résistance de l'air sera proportionnelle au cube de la vitesse si C est nul.

Elle décroîtra plus ou moins rapidement que le cube de la vitesse, suivant que C sera négatif ou positif.

Nous allons examiner successivement ces deux cas et remplacer dans chacun la fonction de x

$$2B + 6Cx$$

par une fonction de v équivalente, du moins pour de faibles valeurs de x.

§ II.

Cas où le coefficient C *est positif.*

Pour de faibles valeurs de x,

$$v = \frac{1}{A + 2Bx}$$

donne

$$x = \frac{1}{2B}\left(\frac{1}{v} - A\right),$$

$$2B + 6Cx = \frac{1}{B}\left(2B^2 - 3AC + \frac{3C}{v}\right),$$

donc

$$\frac{\rho}{m} = \frac{3C}{B}v^3 + \left(2B - \frac{3AC}{B}\right)v^2.$$

§ III.

Cas où le coefficient C est négatif

On aura toujours

$$v = \frac{1}{A + 2Bx} = \frac{1}{A}\left(1 - \frac{2B}{A}x\right),$$

d'où

$$x = \frac{A}{2B}\left(1 - Av\right).$$

Et si, pour faire ressortir le signe du coefficient C, nous posons

$$C = -C',$$

$$2B + 6Cx = \frac{1}{B}\left(2B^2 - 3C'A + 3C'A^2v\right),$$

donc

$$\frac{\rho}{m} = \left(2B - \frac{3C'A}{B}\right)v^2 + \frac{3C'A^2}{B}v^3.$$

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATION AU TIR DES CANONS RAYÉS.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES NUMÉRIQUES EXPRIMANT LA RÉSISTANCE DE L'AIR AU PROJECTILE LANCÉ PAR LE CANON RAYÉ DE 4 DE CAMPAGNE.

Le caractere saillant du tir des armes rayées, c'est la régularité, le degré de similitude auquel on arrive entre deux coups tirés dans les mêmes conditions.

Cette régularité m'a fait penser que ce tir pourrait être soumis avantageusement au calcul, et m'a fait aborder résolûment la complication que présente au premier abord l'obliquité de la résistance de l'air sur la direction de la trajectoire.

§ Ier.

Du relèvement du projectile par l'effet de la résistance de l'air.

Il résulte de la forme du projectile que son axe se place toujours dans la direction du mouvement. Tandis que la trajectoire s'infléchit sous l'action de la pesanteur, les résistances exercées sur toute la surface reviennent à une résultante agissant en arrière du centre de gravité, laquelle relève le projectile en même temps qu'elle incline son axe.

Du frottement dû à cette pression résultante exercée sous le projectile, et du mouvement de rotation que les rayures de la bouche à feu lui ont imprimé autour de son axe, naît une déviation hors du plan de tir dont la loi est facile à saisir, puisqu'on a pu contre-balancer cette déviation dans le canon rayé de 4 de campagne, avec une précision suffisante, en inclinant la hausse de $\frac{1}{10}$ sur le plan perpendiculaire à l'axe des tourillons.

Une remarque nous permettra de tenir compte de la quantité dont le projectile est relevé : c'est que ce relèvement doit être à très-peu près proportionnel à la déviation horizontale dont nous venons de parler, puisqu'ils sont dus, l'un à la pression de l'air normale à la trajectoire, l'autre au frottement qui en est la conséquence.

Ce relèvement sera donc, tant que la trajectoire ne fera que de petits angles avec l'horizon, dans un rapport constant avec la hausse.

Soient ε ce rapport, h la hausse.

Sans ce relèvement, la hausse à donner devrait être augmentée dans le rapport de $1 : 1 + \varepsilon$.

Elle serait $h(1+\varepsilon)$.

§ II.

Préparation à l'application de la méthode exposée dans le chapitre II de la Ire Partie

Soient ξ, la distance entre les deux points de mire de la bouche à feu ;
$h(1+\varepsilon)$ la hausse à la distance x, corrigée du relèvement comme il vient d'être dit.

Cette hausse indique que l'ordonnée de la trajectoire serait à cette distance

$$h(1+\varepsilon)\frac{x}{\xi}.$$

La durée du parcours depuis l'origine, accusée par cet abaissement, serait

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}\cdot h(1+\varepsilon)\frac{x}{\xi}}$$

ou, en posant $\zeta = \frac{\xi}{1+\varepsilon}$;

$$\frac{t}{x} = \sqrt{\frac{1}{\zeta}}\cdot\sqrt{\frac{2}{g}\cdot\frac{h}{x}},$$

à laquelle équation nous tâcherons de substituer une équation suffisamment approchée et de la forme

$$\frac{t}{x} = \sqrt{\frac{1}{\zeta}}(A + Bx + Cx^2)$$

pour l'application de la méthode exposée dans le chapitre II de la Ire Partie.

§ III.

Remarque sur la manière dont le coefficient ζ doit entrer dans les expressions de la vitesse et de la résistance de l'air.

Si nous considérons deux trajectoires dont toutes les ordonnées soient entre elles dans le rapport constant $1 : \zeta$;

Les coefficients différentiels de même ordre des équations de ces deux courbes seront, pour chaque point, dans le même rapport.

Nous conclurons des expressions :

$$v^2 = -g\,\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{m} = \frac{1}{2}\cdot v^2\,\frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2}}$$

que, tant que $\frac{dx}{dy}$ sera assez faible, les valeurs de v^2 et de $\frac{\rho}{m}$ seront, pour chaque point, à très-peu près dans le rapport inverse $\zeta : 1$.

Or v proportionnel à $\sqrt{\zeta}$, c'est t proportionnel à $\sqrt{\frac{1}{\zeta}}$.

La trajectoire pour laquelle

$$\frac{t}{x} = \sqrt{\frac{1}{\zeta}}(A + B.x + C.x^2),$$

et la trajectoire pour laquelle

$$\frac{t}{x} = A + B.x + C.x^2,$$

sont donc dans les conditions que nous venons de supposer, c'est-à-dire que leurs ordonnées sont dans le rapport constant $1 : \zeta$.

Admettons maintenant que la loi de la résistance de l'air, à laquelle serait due la deuxième trajectoire, soit exprimée par la fonction

$$\frac{\rho}{m} = N.v^n + \ldots;$$

la loi de la résistance à laquelle serait due la première se déduira de suite de celle-ci.

En effet, marquant de l'indice prime les valeurs correspondantes à cette première trajectoire, on a

$$v'^2 = \zeta.v^2; \quad \frac{\rho'}{m} = \zeta.\frac{\rho}{m};$$

donc

$$v'^n = (\zeta)^{\frac{n}{2}}.v^n;$$

l'équation

$$\frac{\rho'}{m} = N'.v'^n + \ldots.$$

devient

$$\zeta.\frac{\rho}{m} = N'(\zeta)^{\frac{n}{2}}.v^n + \ldots \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{m} = N'(\zeta)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}.v^n,$$

donc enfin

$$N'(\zeta)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} = N \quad \text{ou} \quad N' = N\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}.$$

Une conséquence pratique de ces observations, c'est que nous pouvons ajourner la considération de la valeur de ζ, et calculer provisoirement les vitesses et la loi de la résistance de l'air, comme si ζ était égal à l'unité.

Cette conséquence est importante, parce que le rapport, pour un point quelconque, de la vitesse ainsi calculée à la vitesse expérimentale donnera immédiatement la valeur même de l'inconnue ζ.

§ IV. Suite du § II.

Données expérimentales.

Dans le tableau, déduit immédiatement de ses expériences par la Commission de La Fère, les distances correspondantes aux hausses indiquées ne sont liées par aucune loi.

Pour la commodité des calculs, nous avons remplacé ce tableau par un autre, dans lequel les hausses, calculées par interpolation, correspondent à des buts équidistants.

Voici ces deux tableaux en regard :

Données primitives.

DISTANCES DU BUT.	HAUSSES.
262^{m}	6.9^{mm}
890	32,9
1527	68
2110	108
2730	172
3114	230

Données adoptées.

DISTANCES DU BUT.	HAUSSES.
300^{m}	8^{mm}
900	33,4
1500	66,4
2100	107,2
2700	168
3300	266

La formule

$$\frac{t}{x} = \sqrt{\frac{1}{\zeta}}\sqrt{\frac{2}{g}\cdot\frac{h}{x}},$$

lorsqu'on y introduit ces valeurs de h et de x, nous a paru pouvoir être remplacée par la formule

$$\frac{t}{x} = \sqrt{\frac{1}{\zeta}}\left(0.0021275 + 0,00000075\,x - 0,00000000000278\,x^2\right).$$

Nous ferons remarquer que les valeurs données à t par la première expression doivent être un peu trop faibles, et d'autant plus que x est plus grand; nous avons donc cherché dans la deuxième à les forcer un peu et d'autant plus que x était plus grand.

Voici du reste un tableau dans lequel nous avons placé en regard, pour les différentes valeurs de x, les valeurs de l'expression

$$A + Bx - C'x^2,$$

et celles de

$$\sqrt{\frac{2}{g}\cdot\frac{h}{x}}.$$

VALEURS de x.	VALEURS QUE PRENNENT LES EXPRESSIONS	
	$\sqrt{\frac{2}{g}\cdot\frac{h}{x}}$.	$A + Bx - C'x^2$.
300	233	235
900	275	278
1500	300	319
2100	323	358
2700	356	395
3300	405	430

Si l'on suppose

$$\zeta = 1,$$

les valeurs

$$A = 0,0021275,$$
$$B = 0,0000075,$$
$$C' = 0.00000000000278,$$

donneront, d'après les formules du § III, chapitre II, pour la vitesse initiale

$$\frac{1}{A} = 470 \text{ metres},$$

et pour la résistance

$$\frac{\rho}{m} = 0,0000012634\, v^2 + 0,00000000050333\, v^4.$$

§ V.

Discussion des résultats précédents.

La trajectoire construite en prenant pour bases les résultats précédents donnerait aux petites distances des hausses un peu plus faibles que les hausses expé-

rimentales, accusant par conséquent des vitesses moyennes plus fortes que les vitesses réelles. Aux grandes distances, au contraire, les vitesses calculées seraient plus faibles que les vitesses réelles.

Nous en concluons que la loi à adopter doit donner des résistances plus fortes pour les grandes vitesses et plus faibles pour les petites : condition que l'on remplira en donnant une valeur plus grande au rapport $\frac{e}{f}$ et une valeur plus faible à f dans la formule empirique

$$\frac{\rho}{m} = fv^2\left(1+\frac{e}{f}v\right).$$

Pour chaque valeur de $\frac{e}{f}$ mise en essai, et pour chaque valeur v_0 adoptée pour la vitesse au sommet, on peut donner une série de valeurs à f, ce qui correspond à une variation proportionnelle de la résistance de l'air ;

Et une série de valeurs à s, distance horizontale de l'origine au sommet de la trajectoire, ce qui correspond dans chaque cas à une variation de la vitesse initiale.

Pour apprécier l'influence des variations de f, on remarquera que ce coefficient augmentant dans le rapport de $1 : 1 + \delta$,

Les termes qui contiennent les fonctions	Augmenteront à peu près de leur valeur multipliée par
M_2	0
M_3	δ
M_4	2δ
M[illegible]	δ
M[illegible]	2δ
M[illegible]	3δ
M[illegible]	4δ

Pour apprécier l'influence des variations de s, on remarquera que s devenant $(s+\sigma)$, la valeur x de l'abscisse d'un point quelconque, dont la distance horizontale z à l'origine de la trajectoire est fixée, deviendra $(x+\sigma)$, et l'ordonnée nouvelle sera égale à très-peu près à l'ordonnée primitive augmentée de $\frac{dy}{dx}\sigma$.

De même

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

deviendra

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^3y}{dx^3}\sigma.$$

La valeur de v^2 subira une modification inversement proportionnelle et de-

viendra

$$v^2 \left(1 - \frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \sigma \right).$$

Appliquant ces principes aux données numériques du problème actuel, on peut établir le tableau des modifications, fonctions de δ et σ, qui seraient apportées aux hausses déjà calculées.

Ce tableau change très-peu lorsque e et f prennent des valeurs sensiblement différentes de celles que nous avons adoptées. C'est sur cette observation que nous nous sommes appuyé pour simplifier les tâtonnements auxquels nous avons dû nous livrer.

Nous sommes arrivé par cette méthode à adopter les valeurs

$$\frac{e}{f} = 0{,}001,$$

$$f = 0{,}00000105,$$

et

$$V_i = 458,$$

pour la vitesse initiale.

§ VI.

Formules numériques adoptées.

Reportons-nous maintenant à ce qui a été dit dans le § IV. La valeur de ζ doit résulter de la comparaison de cette valeur $V_i = 458$ avec celle de la vitesse initiale déduite d'expériences directes.

Je me suis adressé pour connaître cette vitesse initiale à mon ami le colonel Virlet, dont la science et l'obligeance sont bien connues. Le colonel Virlet m'a donné 350 mètres comme résultat d'expériences peu nombreuses et faites à la hâte. C'est sous ces réserves que j'emploie ce nombre.

J'ai donc adopté pour la valeur de ζ

$$\zeta = 0{,}575.$$

ce qui donne, ξ étant égal à 0,69,

$$1 + i = 1{,}20$$

le relèvement

$$i = 0{,}20 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{5}.$$

La loi de la résistance de l'air devient (1)

$$\frac{\rho}{m} = 0{,}00000138\, v^2 \left(1 + \frac{v}{760}\right).$$

(*) Ire partie, chapitre I, § III.

CHAPITRE II.

SOLUTION.

§ I.

Équation de la trajectoire.

La loi que nous venons d'adopter donnerait, dans l'hypothèse de la résistance de l'air directement contraire au mouvement du projectile, et la vitesse au sommet étant égale à 190 mètres. pour les cofficients de l'équation

$$y = M_2 x^2 + M_3 x^3 + \ldots + M_8 x^8,$$

les valeurs suivantes :

$$\log(-M_2) = \overline{4}.1331318,$$
$$\log(-M_3) = \overline{8}.4725832,$$
$$\log(-M_4) = \overline{12}.2891560,$$
$$\log(-M_5) = \overline{16}.3337335.$$
$$\log(-M_6) = \overline{19}.0841667,$$
$$\log(-M_7) = \overline{23}.3780872,$$
$$\log(-M_8) = \overline{27}.5698638.$$

Cette équation auxiliaire donnerait pour chaque abscisse x la vitesse et la résistance de l'air.

L'origine est au point ($x = -1260$) pour lequel la vitesse est égale à 350 mètres.

Nous avons vu que l'influence du relèvement est de diminuer tous ces cofficients dans le rapport de 1,20 : 1.

L'équation de la trajectoire sera donc

$$y = R_2 x^2 + R_3 x^3 + \ldots + R_8 x^8.$$

les valeurs suivantes étant données aux coefficients :

$$\log(-R_2) = \overline{4}.0539506,$$
$$\log(-R_3) = \overline{8}.3934020.$$
$$\log(-R_4) = \overline{12}.2099748.$$
$$\log(-R_5) = \overline{16}.2545523.$$
$$\log(-R_6) = \overline{19}.0049855.$$
$$\log(-R_7) = \overline{23}.2989060.$$
$$\log(-R_8) = \overline{27}.4906826.$$

C'est en partant de cette courbe qu'on devra calculer les hausses

§ II.

Point de vue sous lequel on peut envisager le relèvement. Calcul, à ce point de vue, de l'équation de la trajectoire.

Le relèvement produit le même effet que produirait une diminution de la pesanteur.

On arriverait donc directement à l'équation de la trajectoire en partant de la loi adoptée pour la résistance de l'air, et remplaçant dans les formules du tableau V g par $\gamma = \frac{g}{1+\varepsilon}$.

Cette substitution de γ à g permettra de calculer directement, à l'aide des éléments différentiels de la trajectoire, la vitesse et la résistance de l'air.

Les valeurs obtenues par cette méthode pour les constantes de l'équation

$$y = R_2 x^2 + R_3 x^3 + \dots + R_8 x^8,$$

sont les suivantes :

$$\log(-R_2) = \overline{4}.0539506,$$
$$\log(-R_3) = \overline{8}.3934020,$$
$$\log(-R_4) = \overline{12}.2099748,$$
$$\log(-R_5) = \overline{16}.0729704,$$
$$\log(-R_6) = \overline{20}.8514234,$$
$$\log(-R_7) = \overline{23}.1345862,$$
$$\log(-R_8) = \overline{27}.3021697.$$

§ III.

Remarque sur les différences entre ces deux équations de la trajectoire

Les valeurs R_2, R_3, R_4 dans ces deux équations sont identiques; il n'en est pas de même des valeurs des coefficients suivants. Si l'on se reporte à la formule du tableau V, on verra que dans les trois coefficients différentiels $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, G entre à la première puissance, mais que tous les termes suivants contiennent G à différentes puissances.

Ainsi les deux courbes que nous avons obtenues dans les deux paragraphes précédents ne sont pas identiques. Confondues pendant un certain espace de part et d'autre du sommet, elles iraient en se séparant de plus en plus.

Mais ce n'est qu'en dehors des limites dans lesquelles nous avons à considérer la trajectoire, que ces différences prendraient quelque importance numérique.

Nous n'avons jamais prétendu donner du relèvement une mesure rigoureuse, mais seulement approximative; aussi l'avons-nous considéré indifféremment comme une force verticale, ou comme une force normale à la trajectoire. C'est à peu près à ces deux points de vue différents que doivent correspondre ces deux équations.

Qu'on nous permette ici une autre remarque.

La résistance qu'oppose l'air à un projectile, animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe tangent à sa trajectoire, est évidemment fonction de la vitesse de ce mouvement.

La vitesse de rotation doit aller indéfiniment en diminuant, car on ne voit pour elle aucune cause d'accélération.

Tant que la vitesse de translation ira aussi en diminuant, nous pouvons considérer comme légitime l'emploi de la formule empirique au moyen de laquelle nous avons pu reconstruire la trajectoire observée, et qui donne cette résistance en fonction seulement de la vitesse de translation.

Mais dès que la trajectoire aura dépassé le point où la vitesse de translation est un minimum, il est évident que cette formule ne pourrait plus convenir; car à deux mêmes vitesses de translation correspondraient des vitesses de rotation différentes et par conséquent des résistances de l'air inégales.

Or, pendant tout l'arc de trajectoire soumis à notre analyse, la vitesse va bien en décroissant; mais à la fin elle décroît très-lentement; la limite à laquelle nous sommes avertis de ne plus appliquer notre hypothèse est donc proche.

Une autre remarque restrictive de cette hypothèse, c'est que la même formule numérique ne pourrait pas servir au cas où le projectile serait lancé avec une vitesse initiale différente.

En général, les formules empiriques ne doivent être étendues qu'avec beaucoup de réserve, en dehors des limites dans lesquelles elles ont été vérifiées.

§ IV.

Calcul des hausses.

Revenons à l'équation de la trajectoire que nous avons établie dans le § II de ce chapitre.

Pour le point ($x = -1267$) la vitesse est de 350 mètres, comme le montre le tableau n° VII qui termine ce Mémoire. C'est donc ce point que nous devons prendre pour l'origine de la trajectoire.

Nous avons exposé dans le tableau n° VI la série des calculs par lesquels on

peut arriver de l'équation de la trajectoire à la valeur de la hausse en différents points

Dans ce tableau, comme dans les paragraphes précédents,

s	est la distance de l'origine au sommet;
z	la distance du but pour laquelle on cherche la hausse;
x, y	les coordonnées de ce but par rapport au sommet;
y_i, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_i$	l'ordonnée et l'inclinaison de la trajectoire à son origine;
$\xi = 0^m,69$	la distance entre le pied de la hausse et le guidon;
h	la hausse.

Ce tableau n'est que l'application de ce principe que, dans le canon rayé comme dans toutes les armes où la hausse à 0 donne une ligne de mire parallèle à l'axe, la hausse est l'angle que fait avec la ligne de projection la droite qui va de la bouche à feu au but, mesuré par sa tangente dans un cercle dont le rayon serait égal à la distance entre les deux points de mire.

Cet angle H est la somme (ou la différence) des angles que ces deux lignes font avec l'horizon.

§ V.

Calcul des vitesses.

Nous avons exposé dans le tableau n° VII la série des calculs par lesquels nous sommes arrivés à l'expression de la vitesse et de la résistance de l'air ρ' pour des points placés à des distances de l'origine multiples de 600 mètres depuis 0 jusqu'à 3000 mètres.

Ce tableau n'est que l'application des formules que nous avons établies au commencement de ce Mémoire :

$$v^2 = -g \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\frac{\rho'}{m} = \frac{1}{2}\cdot v^2 \frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous avons comparé avec cette valeur de la résistance de l'air celle que donnerait la formule empirique

$$\frac{\rho}{m} = 0,00000138.v^2\left(1+\frac{v}{760}\right).$$

Le rapport de ces deux valeurs fera conclure, nous l'espérons, que l'équation du huitième degré donnée immédiatement par nos formules représente avec une approximation satisfaisante la trajectoire qui résulte de cette loi.

§ VI.

Durée du parcours

La durée se déduit de l'équation

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g\,\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-\frac{d^2y}{dx^2}},$$

qui donne

$$dt^2 = -\frac{1}{g}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2,$$

d'où

$$t = \int_{x=x_1}^{x=x} dx\,\sqrt{-\frac{1}{g}(2R_2+6R_3.x+12R_4.x^2+20R_5.x^3+30R_6.x^4+42R_7.x^5+56R_8.x^6+\ldots)}.$$

Si on pose

$$\sqrt{-\frac{1}{g}(2R_2+6R_3.x+\ldots)} = T_1+2T_2.x+3T_3.x^2+4T_4.x^3+5T_5.x^4+6T_6.x^5+7T_7.x^6+\ldots,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
T_1^2 &= \frac{1}{g}(-2.R_2),\\
4.T_1.T_2 &= \frac{1}{g}(-6.R_3),\\
6.T_1.T_3 + 4.T_2^2 &= \frac{1}{g}(-12.R_4),\\
8.T_1.T_4 + 12.T_2.T_3 &= \frac{1}{g}(-20.R_5),\\
10.T_1.T_5 + 16.T_2.T_4 + 9.T_3^2 &= \frac{1}{g}(-30.R_6),\\
12.T_1.T_6 + 20.T_2.T_5 + 24.T_3.T_4 &= \frac{1}{g}(-42.R_7),\\
14.T_1.T_7 + 24.T_2.T_6 + 30.T_3.T_5 + 16.T_4^2 &= \frac{1}{g}(-56.R_8),
\end{aligned}$$

l'équation ci-dessus reviendra à

$$t = f(x) - f(x_1),$$

$f(x)$ étant égal à

$$T_1.x+T_2.x^2+T_3.x^3+T_4.x^4+T_5.x^5+T_6.x^6+T_7.x^7+\ldots.$$

Les equations de condition que nous venons de poser donnent dans le cas actuel :

$$
\begin{aligned}
\log T_1 &= \bar{3}.7162464,\\
\log T_2 &= \bar{7}.9407591,\\
\log(-T_3) &= \overline{11}.3280551,\\
\log T_4 &= \overline{14}.0901461,\\
\log T_5 &= \overline{18}.2120038,\\
\log T_6 &= \overline{22}.8855042,\\
\log(-T_7) &= \overline{26}.1933646,
\end{aligned}
$$

valeurs à l'aide desquelles il sera facile de calculer la durée d'un arc quelconque de trajectoire.

Résumé.

Nous voici arrivé à la solution complète du problème que nous nous étions posé. Résumons la méthode que nous avons suivie.

En méditant sur le mouvement de rotation du projectile autour de son grand axe et sur le mouvement propre de cet axe qui s'incline incessamment avec la tangente à la trajectoire, nous avons été conduits à la conclusion qu'il devait, en même temps que la déviation en dehors du plan de tir, exister une déviation verticale, un relèvement proportionnel à la hausse, dont la cause équivaut par conséquent à une diminution constante de la pesanteur.

Partant des hausses et de la vitesse initiale expérimentales du projectile, nous avons calculé à la fois la valeur numérique de cette diminution de la pesanteur, et la loi de la résistance de l'air.

Tel a été le rôle de l'analyse dans notre travail.

Dans le dernier chapitre, nous avons reconstruit synthétiquement la trajectoire qui devait résulter de la même vitesse initiale, de la gravité ainsi réduite et enfin de la loi de la résistance de l'air adoptée.

Le peu d'écart entre les hausses calculées d'après cette trajectoire et les hausses expérimentales nous donne l'espoir que les lois que nous avons adoptées s'écartent peu des lois reelles qui régissent le mouvement des projectiles lancés par les canons rayés.

onque. des dérivées de la trajectoire.

xprimés par la formule

$$\frac{e}{r} + \frac{e^2}{s^2}\Big].$$

$$+ 30.\frac{e}{r^2.s^2} + 36.\frac{e}{s^2} + 9.\frac{e}{r.s^2}\Big).$$

$$+ 5.\frac{e}{r^2.s^2} + 3.\frac{e}{r.s^6}\Big).$$

$$419.\frac{e}{r^2.s^2} + 420.\frac{e}{s^4} + 315.\frac{e}{r.s^4} + 72.\frac{e}{s^6}\Big).$$

$$+ 646.\frac{e}{r^2.s^2} + 636.\frac{e}{s^4} + 477.\frac{e}{r.s^4} + 108.\frac{e}{s^6}\Big).$$

$$\frac{e}{r.s^2} + 20.\frac{e}{r^4} + 306.\frac{e}{r^2.s^2} + 176.\frac{e}{s^4} + 38.\frac{e}{r^2.s^2} + 122.\frac{e}{r.s^4} + 41.\frac{e}{r^2.s^4} + 24.\frac{e}{r.s^6}\Big).$$

$$8.\frac{e}{r.s^4} - 6.\frac{e}{r^3.s^2} - 23.\frac{e}{r^2.s^4} - 26.\frac{e}{r^3.s^4} - 18.\frac{e}{r.s^4} - 35.\frac{e}{r^2.s^4} - 15.\frac{e}{r.s^6}\Big).$$

(Page 22.)

derivées de la trajectoire

ée par la formule

$$\Big]\,.$$

$$5\,.\,\frac{v_0^4}{s^4} + 162\,.\,\frac{v_0^5}{r\,.\,s^4} + 36\,.\,\frac{v_0^6}{s^6}\Big)\,.$$

$$\frac{v_0^7}{r\,.\,s^6}\Big)\,.$$

$$822\,.\,\frac{v_0^4}{r^2\,.\,s^2} + 1872\,.\,\frac{v_0^4}{s^4} + 792\,.\,\frac{v_0^5}{r^2\,.\,s^4} + 2390\,.\,\frac{v_0^5}{r\,.\,s^4} + 657\,.\,\frac{v_0^6}{r^2\,.\,s^4} + 432\,.\,\frac{v_0^6}{s^6} + 162\,.\,\frac{v_0^7}{r\,.\,s^6}\Big)\,.$$

$$4\,.\,\frac{v_0^6}{r^3\,.\,s^2} + 92\,.\,\frac{v_0^6}{r^2\,.\,s^3} + 130\,.\,\frac{v_0^7}{r^2\,.\,s^4} + 90\,.\,\frac{v_0^7}{r\,.\,s^4} + 210\,.\,\frac{v_0^8}{r^2\,.\,s^5} + 105\,.\,\frac{v_0^9}{r\,.\,s^5}\Big)\,.$$

(Page 22)

N° III.

Tableau des valeurs, au sommet, des dérivées de la trajectoire.

La résistance de l'air étant exprimée par la formule

$$\rho = kmv^2\left(1+\frac{v}{r}\right).$$

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} = -\ \frac{g}{v_0^2},$$

$$\frac{d^3y_0}{dx^3} = -\ 2.\frac{g}{v_0^2}\cdot k.\left(1+\frac{v_0}{r}\right),$$

$$\frac{d^4y_0}{dx^4} = -\ 2.\frac{g}{v_0^2}\cdot k^2.\left(1+\frac{v_0}{r}\right)\left(2+\frac{v_0}{r}\right).$$

$$\frac{d^5y_0}{dx^5} = \begin{cases} -\ 2.\dfrac{g^3}{v_0^6}\cdot k.\left(1+2.\dfrac{v_0}{r}\right), \\ -\ 2.\dfrac{g}{v_0^2}\cdot k^3.\left(1+\dfrac{v_0}{r}\right)\left(4+3.\dfrac{v_0}{r}\right), \end{cases}$$

$$\frac{d^6y_0}{dx^6} = \begin{cases} -\ 2.\dfrac{g^3}{v_0^6}\cdot k^2.\left(14+35.\dfrac{v_0}{r}+20.\dfrac{v_0^2}{r^2}\right), \\ -\ 2.\dfrac{g}{v_0^2}\cdot k^4.\left(1+\dfrac{v_0}{r}\right)\left(8+7.\dfrac{v_0}{r}\right). \end{cases}$$

$$\frac{d^7y_0}{dx^7} = \begin{cases} +\ 6.\dfrac{g^5}{v_0^{10}}\cdot k, \\ -\ 2.\dfrac{g^3}{v_0^6}\cdot k^3\left(128+376.\dfrac{v_0}{r}+347.\dfrac{v_0^2}{r^2}+100.\dfrac{v_0^3}{r^3}\right), \\ -\ 2.\dfrac{g}{v_0^2}\cdot k^5\left(1+\dfrac{v_0}{r}\right)\left(16+15.\dfrac{v_0}{r}\right). \end{cases}$$

$$\frac{d^8y_0}{dx^8_0} = \begin{cases} +\ 2.\dfrac{g^5}{v_0^{10}}\cdot k^2\left(66-7\ \dfrac{v_0}{r}-80.\dfrac{v_0^2}{r^2}\right), \\ -\ 2.\dfrac{g^3}{v_0^6}\cdot k^4\left(976+3250.\dfrac{v_0}{r}+3845.\dfrac{v_0^2}{r^2}+1892.\dfrac{v_0^3}{r^3}+320.\dfrac{v_0^4}{r^3}\right), \\ -\ 2.\dfrac{g}{v_0^2}\cdot k^6\left(1+\dfrac{v_0}{r}\right)\left(32+31.\dfrac{v_0}{r}\right). \end{cases}$$

N° IV.

Tableau des valeurs, au sommet, des dérivées de la trajectoire.

La résistance de l'air étant exprimée par la formule

$$\rho = km.v^2.$$

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} = -\frac{g}{v_0^2},$$

$$\frac{d^3 y_0}{dx^3} = -2.k.\frac{g}{v_0},$$

$$\frac{d^4 y_0}{dx^4} = -2.k^2.g,$$

$$\frac{d^5 y_0}{dx^5} = -4.k.\frac{g^2}{v_0^4},$$

$$\frac{d^6 y_0}{dx^6} = -40.k^2.\frac{g^2}{v_0^4},$$

$$\frac{d^7 y_0}{dx^7} = -200.k^3.\frac{g^2}{v_0^3},$$

$$\frac{d^8 y_0}{dx^8} = -160.k^2.\frac{g^2}{v_0^2}\left[\frac{g^2}{v_0^6} + 4.k^2\right].$$

N° V.

Tableau des valeurs, au sommet, des dérivées de la trajectoire.

La résistance de l'air étant exprimée par la formule

$$\frac{\rho}{m} = f.v^2 + e.v^4.$$

(Nous avons trouvé avantageux de remplacer $\frac{g}{v_0^2}$ par G ; $f.v_0$ par F ; $e.v_0^2$ par E.)

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} = -\ G,$$

$$\frac{d^3 y_0}{dx^3} = -\ 2.G(F+E),$$

$$\frac{d^4 y_0}{dx^4} = -\ 2.G.F(F+E),$$

$$\frac{d^5 y_0}{dx^5} = \begin{cases} -\ 2.G^2(2F+3E) \\ +\ 2.G.F.E(F+E), \end{cases}$$

$$\frac{d^6 y_0}{dx^6} = \begin{cases} -\ 2.G^2.F^2\left(20 + 39.\frac{E}{F} + 18.\frac{E^2}{F^2}\right). \\ -\ 2.G.F.E.(F+E)(2F+3E), \end{cases}$$

$$\frac{d^7 y_0}{dx^7} = \begin{cases} -\ 18.G^3.E, \\ -\ 2.G^2.F^3\left(100 + 227.\frac{E}{F} + 162.\frac{E^2}{F^2} + 36.\frac{E^3}{F^3}\right), \\ +\ 2.G.F^3.E(F+E)\left(6 + 20.\frac{E}{F} + 15.\frac{E^2}{F^2}\right), \end{cases}$$

$$\frac{d^8 y_0}{dx^8} = \begin{cases} -\ 2.G^3.F^2\left(80 + 369.\frac{E}{F} + 270.\frac{E^2}{F^2}\right). \\ -\ 2.G^2.F^4\left(324 + 792.\frac{E}{F} + 657.\frac{E^2}{F^2} + 162.\frac{E^3}{F^3}\right). \\ -\ 2.G.F^4.E(F+E)\left(24 + 130.\frac{E}{F} + 210.\frac{E^2}{F^2} + 105.\frac{E^3}{F^3}\right). \end{cases}$$

N° VI.

Calcul des hausses.

$s =$	−1267	−1267	−1267	−1267	−1267	−1267
$z =$	+262	+890	+1527	+2110	+2730	+3114
$x =$	−1005	−377	+260	+843	+1463	+1847
$y_1 =$	−135,472	−135,472	−135,472	−135,472	−135,472	−135,472
$-y =$	+90,843	+14,796	+8,096	+96,185	+313,041	+567,656
$y_1 - y =$	−44,629	−120,676	−127,376	−39,287	+177,569	+432,184
$\frac{y_1 - y}{z} =$	−0,170340	−0,135591	−0,083416	−0,018620	+0,065044	+0,138787
$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 =$	+0,180523	+0,180523	+0,180523	+0,180523	+0,180523	+0,180523
$H =$	+0,010183	+0,044932	+0,097107	+0,161903	+0,245567	+0,319312
$h = H\xi =$	0,0070	0,0310	0,0710	0,1117	0,1694	0,2203
au lieu de	0,0069	0,0329	0,068	0,108	0,172	0,230
Différence en millimètres	$+0^{mm},1$	$-1^{mm},9$	$+3^{mm}$	$+3^{mm},7$	$-2^{mm},6$	$-9^{mm},7$

N° VII. — *Calcul des vitesses et résistances de l'air.*

$x =$	-1267	-667	-67	+533	+1133	+1733
$\frac{dy}{dx} =$	+ 0,180523	+0,119882	+0,014841	-0,142836	-0,363294	-0,664448
$\frac{d^2y}{dx^2} =$	-0,000068894	-0,000135756	-0.000216596	-0,000311659	-0,000427878	-0,000585673
$\frac{d^3y}{dx^3} =$	-0.000000098364	-0,000000123587	-0,000000145862	-0,000000172753	-0,000000220021	-0.000000317923
$\log\left(\pm\frac{dy}{dx}\right) =$	$\bar{1}$.2565325	$\bar{1}$.0787540	$\bar{2}$.1714632	$\bar{1}$.1548376	$\bar{1}$.5602582	$\bar{1}$.8224610
$\log\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right) =$	$\bar{5}$.8381814	$\bar{4}$.1327590	$\bar{4}$.3356505	$\bar{4}$.4936797	$\bar{4}$.6313200	$\bar{4}$.7676552
$\log\left(-\frac{d^3y}{dx^3}\right) =$	$\bar{8}$.9928362	$\bar{7}$.0919728	$\bar{7}$.1639422	$\bar{7}$.2374256	$\bar{7}$.3424642	$\bar{7}$,5023219
$\log\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] =$	0.0139273	0.0061971	0.0000966	0.0087713	0.0538397	0.1588119
$\log\gamma =$	0.9124878	0.9124878	0.9124878	0.9124878	0.9124878	0.9124878
$\text{comp}\log\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right) =$	4.1618186	3.8672410	3.6643495	3.5063203	3.3686800	3.2323448
$\log v^2 =$	5.0882337	4.7859259	4.5769339	4.4275794	4.3350075	4.3036445
$\log\frac{1}{2} =$	$\bar{1}$.6989700	$\bar{1}$.6989700	$\bar{1}$.6989700	$\bar{1}$.6989700	1.6989700	$\bar{1}$.6989700
$\log\left(-\frac{d^3y}{dx^3}\right) =$	$\bar{8}$.9928362	$\bar{7}$.0919728	$\bar{7}$.1639422	7.2374256	$\bar{7}$.3424642	$\bar{7}$.5023219
$\log\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$	-0.0069637	-0.0030986	-0.0000483	-0.0043857	-0.0269199	-0.0794060
$\log\frac{\rho'}{m} =$	1.9348948	1.4410111	1.1041473	0,8659096	0.7180836	0.6578752
$\log v =$	2.5441169	2.3929630	2.2884670	2.2137897	2.1675038	2.1518223
$\log\left(1+\frac{v}{760}\right) =$	0.1645248	0.1222811	0.0988700	0.0846714	0.0768239	0.0743197
$\log v^2 =$	7.6323506	7.1788889	6.8654009	6.6413691	6.5025113	6.4554668
$\log 0{,}00000138 =$	$\bar{6}$.1398791	$\bar{6}$.1398791	$\bar{6}$.1398791	$\bar{6}$,1398791	$\bar{6}$.1398791	$\bar{6}$.1398791
$\log\frac{\rho}{m} =$	1.9367545	1.4410491	1.1041500	0.8659196	0.7192143	0.6696656
report de $\log\frac{\rho'}{m} =$	1.9348948	1.4410111	1.1041473	0.8659096	0.7180836	0.6578752
$\log\frac{\rho}{\rho'} =$	0.0018597	0.0000380	0.0000027	0.0000100	0.0011307	0.0117904
$\rho : \rho' =$	1,0042913	1,0000875	1,0000062	1,0000230	1.0026070	1,0275197

NOTE

SUR

LA FORME QUE DOIT PRENDRE L'ÉQUATION D'UNE TRAJECTOIRE, POUR LA REPRÉSENTER DANS TOUTE SON ÉTENDUE.

Le développement en une série d'un nombre limité de termes ne peut représenter qu'un arc de la trajectoire.

Une équation parabolique ne peut reproduire, par exemple, le mouvement du projectile lorsqu'il devient presque vertical sous l'action incessante de deux forces, dont l'une, la résistance de l'air, tend à réduire dans la même proportion les composantes horizontale et verticale de la vitesse; dont l'autre, la pesanteur, n'agit que sur la composante verticale.

§ 1.

Étude de la branche descendante de la trajectoire.

La résistance de l'air agit seule au sommet pour diminuer la vitesse, et diminue elle-même pendant quelque temps avec cette vitesse.

La pesanteur normale au sommet à la courbe voit sa composante tangentielle, accélératrice désormais de la vitesse, croître successivement. La vitesse ne diminue donc que jusqu'à un point après lequel la vitesse, la résistance de l'air et la composante tangentielle de la pesanteur iront en croissant simultanément. Les deux forces approcheront de plus en plus d'une limite d'intensité qui est le poids même du projectile.

A cette limite, la vitesse sera uniforme; ce sera la vitesse pour laquelle $\rho = p$.

La trajectoire se confondra avec une asymptote verticale. Les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ seront infinis.

Soit $x = a$ la distance horizontale de cette asymptote au sommet de la trajectoire; les fonctions de x : $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant infinies pour cette valeur, c'est que dans leur expression entre un terme qui a $\frac{1}{a-x}$ pour facteur.

L'expression

$$v^2 = -g \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

prenant alors une valeur v_a^2 finie et déterminée, il faut que l'exposant de $\frac{1}{a-x}$ dans $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit double de l'exposant de ce facteur dans $\frac{dy}{dx}$. Donc dans $\frac{dy}{dx}$ l'exposant de $\frac{1}{a-x}$ est 1; et dans l'expression de y entre un terme de la forme $\varphi(x)\, l(a-x)$.

Nous pouvons adopter pour cette expression la forme

$$y = f(x) + \varphi(x)\, l(a-x),$$

$f(x)$, $\varphi(x)$, étant des fonctions qui conservent, ainsi que leurs dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$, $f''(x)$, $\varphi''(x)$, des valeurs finies tant que x n'est pas plus grand que a.

Si nous affectons de l'indice a les fonctions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ pour indiquer les valeurs infinies qu'elles prennent pour $x = a$, nous aurons

$$\frac{dy_a}{dx} = \varphi'(a)\, l(a-x) - \frac{\varphi(a)}{a-x} = \frac{\varphi'(a)\,(a-x)\, l(a-x) - \varphi(a)}{a-x}.$$

Or

$$(a-x)\, l(a-x) = 0,$$

quand

$$x = a;$$

le premier terme du numérateur disparaît donc devant le deuxième, et l'on peut écrire

$$\frac{dy_a}{dx} = -\frac{\varphi(a)}{(a-x)}$$

De même

$$\frac{d^2y_a}{dx^2} = \varphi''(a)\, l(a-x) - 2\frac{\varphi' a}{a-x} - \frac{\varphi(a)}{(a-x)^2},$$

revient à

$$\frac{d^2y_a}{dx^2} = -\frac{\varphi(a)}{(a-x)^2}.$$

Substituant ces valeurs de $\frac{dy_a}{dx}$, $\frac{d^2y_a}{dx^2}$ dans l'expression de v_a^2, on aura

$$\frac{v_a^2}{g} = \varphi(a),$$

première condition à laquelle devra satisfaire la fonction $\varphi(x)$.

L'expression $\frac{v^2}{g} = \varphi(x)$, qui n'est rigoureusement exacte qu'à cette limite, donne une valeur approchée de v, tant que x diffère peu de a.

Cette valeur pendant assez longtemps devra différer très-peu de v_a, nouvelle condition à laquelle on satisfera en exprimant qu'un certain nombre de dérivées de $\varphi(x)$ sont nulles pour $x = a$,

$$\varphi'(a) = 0, \quad \varphi''(a) = 0, \ldots.$$

§ II.

Étude de la branche ascendante.

Analysons de même le rôle de la résistance de l'air et de la pesanteur dans la branche ascendante de la trajectoire. Ou plutôt, pour partir comme tout à l'heure du sommet, en nous dirigeant vers les points de cette courbe illimitée situés à l'infini, imaginons que le projectile, animé en chaque point des mêmes vitesses, parcoure cette branche en sens contraire. Pour cela, il suffit de concevoir, au lieu de la résistance de l'air, une force égale et contraire accélérant le mouvement du projectile en même temps que la pesanteur.

De ces deux forces, l'une croît très-rapidement, et tend à augmenter dans la même proportion les composantes horizontale et verticale; l'autre, la pesanteur, ajoute par temps égaux des quantités égales à la vitesse verticale. La direction ira donc toujours se rapprochant de la verticale; mais à cause de cette rapide accélération de la vitesse sous l'action de la première force, la quantité dont l'angle fait avec l'horizon sera augmenté, pour un espace égal parcouru, décroîtra rapidement. La somme de la série indéfinie de ces quantités sera finie et déterminée; l'inclinaison n'arrivera pas à être verticale à la limite.

Dans le langage infinitésimal, pour $x = -\infty$, $\frac{dy}{dx}$ aura une valeur finie; $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^3y}{dx^3}$ seront nuls.

La forme parabolique est donc aussi impropre à représenter cette partie de la trajectoire; et dans l'équation

$$y = f(x) + \varphi(x)\, l\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

il faut entendre par $f(x)$ une suite de termes de la même forme que $\varphi(x)\, l\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ dans lesquels entreront de nouvelles constantes a', a'', ..., toutes positives et plus grandes que a.

§ III.

Résumé.

L'équation

$$y = (Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots) l\left(1 - \frac{x}{a}\right) + (A'x + B'x^2 + C'x^3 + \ldots) l\left(1 - \frac{x}{a'}\right) + \ldots,$$

dans laquelle a, a', a'', ..., sont des quantités positives plus grandes chacune que celle qui la précède;

Ou, sous une notation plus générale,

$$y = \Sigma\left[(Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots) l\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right],$$

pourra donc représenter une trajectoire dans toute son étendue, sous les conditions exprimées dans les deux paragraphes précédents et dans le chapitre I de la première Partie de ce Mémoire.

Si d'abord on pose $x = a$, on aura les équations de condition qui règlent la forme de la courbe à l'extrémité de sa branche descendante.

Ces conditions peuvent déterminer entièrement les constantes A, B, C, ..., en fonction de la valeur de a et du nombre de ces constantes ou, ce qui revient au même, du degré du polynôme qui multiplie $l\left(1 - \frac{x}{a}\right)$.

En effet, 1° la fonction $Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ pour $x = a$ doit prendre la valeur $\frac{v_a^2}{g}$.

2° Les coefficients différentiels de cette fonction de degré n deviendront tous nuls si l'on établit qu'il y a identité entre les fonctions

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \quad \text{et} \quad \frac{A}{na^{n-1}} \cdot [a^n - (a - x)^n].$$

Les valeurs de A, B, C, D, ..., seront

$$A = \frac{n}{a} \cdot \frac{v_a^2}{g},$$

$$B = -\frac{n(n-1)}{2.a^2} \cdot \frac{v_a^2}{g},$$

$$C = +\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.a^3} \cdot \frac{v_a^2}{g},$$

$$D = -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4.a^4} \cdot \frac{v_a^2}{g},$$

et ainsi de suite

Considérons maintenant les dérivées successives de l'équation générale de la trajectoire

$$\frac{dy}{dx} = \Sigma\left[(\mathrm{A} + 2.\mathrm{B}.x + 3.\mathrm{C}.x^2 + 4.\mathrm{D}.x^3 + \ldots)\, l\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] - \Sigma\,\frac{\mathrm{A}x + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x^3 + \mathrm{D}x^4 + \ldots}{a - x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{\begin{aligned} &\Sigma\left[(2.\mathrm{B} + 6.\mathrm{C}x + 12.\mathrm{D}.x^2 + \ldots)\, l\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] - 2.\Sigma\,\frac{\mathrm{A} + 2.\mathrm{B}.x + 3.\mathrm{C}.x^2 + 4.\mathrm{D}x^3 + \ldots}{a - x} \\ &\qquad - \Sigma\,\frac{\mathrm{A}x + \mathrm{B}.x^2 + \mathrm{C}.x^3 + \mathrm{D}.x^4 + \ldots}{(a - x)^2} \end{aligned}\right\},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left\{\begin{aligned} &\Sigma\left[(6.\mathrm{C} + 24.\mathrm{D}.x + \ldots)\, l\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] - 3.\Sigma\,\frac{2.\mathrm{B} + 6.\mathrm{C}.x + 12.\mathrm{D}.x^2 + \ldots}{a - x} \\ &\qquad - 3.\Sigma\,\frac{\mathrm{A} + 2.\mathrm{B}.x + 3.\mathrm{C}.x^2 + 4.\mathrm{D}.x^3 + \ldots}{(a - x)^2} \\ &\qquad - 2.\Sigma\,\frac{\mathrm{A}x + \mathrm{B}.x^2 + \mathrm{C}x^3 + \mathrm{D}.x^4 + \ldots}{(a - x)^3} \end{aligned}\right\},$$

....

Si l'on pose $x = 0$, on aura les équations de condition qui règlent la forme de la trajectoire de part et d'autre du sommet.

Les voici :

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} = -\ 2.\Sigma\left(\frac{\mathrm{A}}{a}\right),$$

$$\frac{d^3y_0}{dx^3} = -\ 3.\Sigma\left(\frac{\mathrm{A}}{a^2}\right) - 6.\Sigma\left(\frac{\mathrm{B}}{a}\right),$$

$$\frac{d^4y_0}{dx^4} = -\ 8.\Sigma\left(\frac{\mathrm{A}}{a^3}\right) - 12.\Sigma\left(\frac{\mathrm{B}}{a^2}\right) - 24.\Sigma\left(\frac{\mathrm{C}}{a}\right),$$

$$\frac{d^5y_0}{dx^5} = -\ 30.\Sigma\left(\frac{\mathrm{A}}{a^4}\right) - 40.\Sigma\left(\frac{\mathrm{B}}{a^3}\right) - 60.\Sigma\left(\frac{\mathrm{C}}{a^2}\right) - 120.\Sigma\left(\frac{\mathrm{D}}{a}\right).$$

et ainsi de suite (*).

Enfin si l'on pose $x = -\infty$, on aura les équations de condition qui règlent la forme de la courbe vers l'extrémité de sa branche ascendante.

$\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ devenant nuls et $\frac{dy}{dx}$ ayant toujours une valeur finie ; il faut égaler à o, dans ce cas, tous les coefficients de $l.\,x$ et des différentes puissances de x.

(*) Loi de formation des coefficients numériques.

Chacun des coefficients numériques des derniers termes de ces fonctions se forme en multipliant le précédent par le nombre n qui marque l'ordre du coefficient différentiel.

Les coefficients numériques d'une même fonction se forment en divisant le dernier par $(n - 1)$, $(n - 2)$, $(n - 3)$, ..., 2, 1.



On aura donc :

$$\Sigma(A) = 0,$$
$$\Sigma(B) = 0,$$
$$\Sigma(B \log a) = 0,$$
$$\Sigma(C) = 0,$$
$$\Sigma(C \log a) = 0,$$
$$\Sigma(D) = 0,$$
$$\Sigma(D \log a) = 0,$$

et ainsi de suite.

Ces différentes équations de condition établies, ce n'est que par une série de tâtonnements que l'on arriverait à les appliquer numériquement à quelques problèmes particuliers.

Nous n'avons pas entrepris cette tâche, l'objet que nous nous étions proposé dans cette Note était seulement l'analyse des conditions que doit remplir une trajectoire, et la recherche de la forme que doit prendre son équation.

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.




BIBLIOTECA